10 Figuras planas. Áreas

INTRODUCCIÓN

Por el teorema de Pitágoras, podemos calcular cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo en función de los otros. Se plantean problemas relacionados con dicho teorema en los que la interpretación gráfica de los mismos nos ayuda en su resolución.

Continuamos esta unidad recordando las unidades de longitud y superficie, y las conversiones entre ellas. Se hace también mención a las diferentes unidades para medir superficies agrarias. Los conceptos de perímetro de un polígono y área de una figura se introducen previamente al cálculo de las áreas de los principales paralelogramos y polígonos regulares: triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, y polígonos de lados iguales.

Siendo conocida ya por los alumnos la relación entre el perímetro o la longitud de la circunferencia y su diámetro, procedemos a calcular el área de la superficie que delimita, es decir, la superficie del círculo, que se introduce como un polígono de muchos lados iguales, por lo que su área se halla en función del perímetro y el radio. Los ejemplos gráficos y relacionados con la vida real nos ayudarán en la resolución de problemas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Teorema de Pitágoras*: en un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- El *metro* es la unidad principal de longitud. El paso entre las unidades de longitud se efectúa multiplicando o dividiendo por 10.
- El *metro cuadrado* es la unidad principal de superficie. Para transformar las unidades de superficie se multiplica o se divide por 100. El área y la hectárea son unidades de superficie agrarias.
- El *perímetro de un polígono* es la medida de su contorno. Para calcularlo sumamos todos sus lados.
- El *área de una figura* es la medida de su superficie. Calculamos las áreas de los principales polígonos: triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, romboide y polígonos regulares.
- La *longitud o perímetro de la circunferencia* es igual al diámetro (dos veces el radio) multiplicado por el número π.
- El *círculo* es la superficie que ocupa una circunferencia. El área de un círculo es igual a π multiplicado por el radio al cuadrado.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Comprender el teorema de Pitágoras.	• Triángulo rectángulo. • Área de los cuadrados sobre los lados. • Teorema de Pitágoras: enunciado.	• Reconocimiento de los lados de un triángulo rectángulo. • Aplicación del teorema de Pitágoras. • Resolución de problemas.
2. Conocer las unidades de longitud y superficie. Calcular perímetros.	• Unidades de longitud y superficie. • Múltiplos y submúltiplos. Unidades agrarias. • Perímetro de un polígono.	• Identificación de magnitudes. Conversión de unidades de longitud y superficie. • Resolución de problemas. • Cálculo de perímetros.
3. Calcular el área de los principales polígonos.	• Área de una figura. • Área de polígonos: rectángulo, cuadrado, rombo, romboide y triángulo. • Área de polígonos regulares.	• Estimación de áreas. • Cálculo del área de los principales paralelogramos y polígonos regulares. • Resolución de problemas.
4. Calcular el área y el perímetro de figuras circulares.	• Circunferencia y círculo. • Relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Número π. • Área del círculo.	• Relación de la longitud de la circunferencia y su diámetro. • Cálculo de la superficie del círculo. • Resolución de problemas.

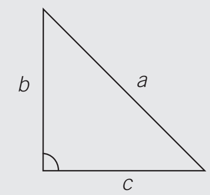
OBJETIVO 1

COMPRENDER EL TEOREMA DE PITÁGORAS

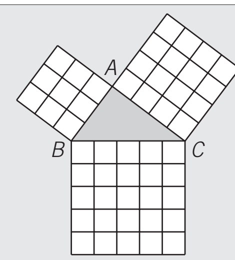
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

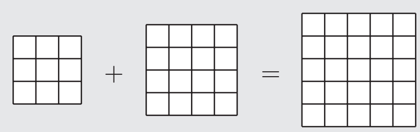
- Un triángulo rectángulo tiene un **ángulo recto (90°)**.
- Los lados que forman el ángulo recto se denominan **catetos**, ***b* y *c***. El lado mayor se llama **hipotenusa**, ***a***.
- Ejemplos de triángulos rectángulos son la escuadra y el cartabón.



CUADRADOS SOBRE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO



- Sobre los lados de un triángulo rectángulo construimos cuadrados, como se ve en la figura.
- La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los dos catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.



1 **Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm.**

a) Forma el ángulo recto con ambos catetos y comprueba que mide 90º.

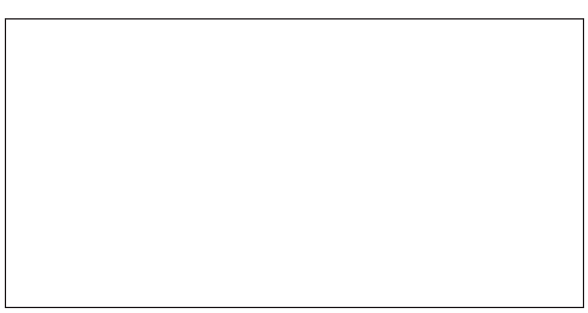
b) Mide la longitud del lado mayor: hipotenusa.

c) Nombra sus elementos: ángulo recto y lados.

2 **Traza una diagonal sobre el siguiente rectángulo e indica.**

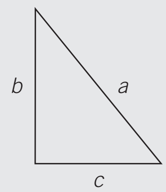
a) ¿Qué polígonos se han formado?

b) Nombra sus elementos.



TEOREMA DE PITÁGORAS

- Pitágoras fue un científico de la época griega, que enunció el teorema que lleva su nombre y que afirma: «En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos».



$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ Despejando $\longrightarrow$ $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

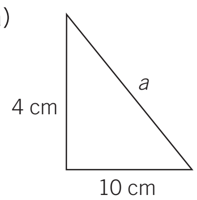
- Se pueden hallar los valores de los catetos en función de los otros valores:

$b^2 = a^2 - c^2$ Despejando $\longrightarrow$ $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

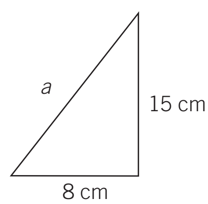
$c^2 = a^2 - b^2$ Despejando $\longrightarrow$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

3 **Calcula el valor de la hipotenusa en los siguientes triángulos rectángulos.**

a)

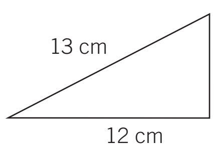


b)

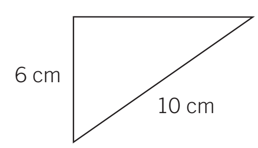


4 **Obtén el valor de los catetos que faltan en cada triángulo rectángulo.**

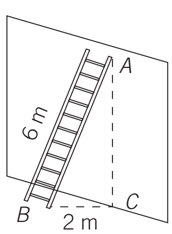
a)



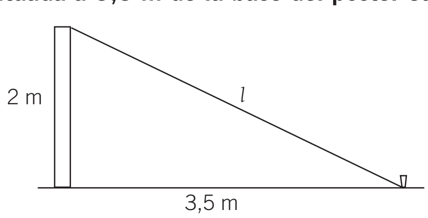
b)



5 **Una escalera que mide 6 m se apoya en una pared. Desde la base de la escalera a la pared hay una distancia de 2 m. Halla la altura marcada en la pared por la escalera.** ***(En la figura, la distancia* AC.)**



6 **Pedro y Elisa quieren sujetar con una cuerda un poste de 2 m de altura a una estaca que está situada a 3,5 m de la base del poste. Calcula la longitud de la cuerda que necesitan.**



10 OBJETIVO 2
CONOCER LAS UNIDADES DE LONGITUD Y SUPERFICIE. CALCULAR PERÍMETROS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

UNIDADES DE LONGITUD

- El **metro** es la unidad principal de longitud. Abreviadamente se escribe **m**.
- Los **múltiplos** (unidades mayores) y **submúltiplos** (unidades menores) del metro son:

MÚLTIPLOS DEL METRO				UNIDAD PRINCIPAL	SUBMÚLTIPLOS DEL METRO		
10.000 m miriámetro mam	1.000 m kilómetro km	100 m hectómetro hm	10 m decámetro dam	**metro** **m**	0,1 m decímetro dm	0,01 m centímetro cm	0,001 m milímetro mm

- Cada unidad es 10 veces mayor que la inmediata inferior y 10 veces menor que la inmediata superior.

$$\text{mam} \xrightarrow{\cdot 10} \text{km} \xrightarrow{\cdot 10} \text{hm} \xrightarrow{\cdot 10} \text{dam} \xrightarrow{\cdot 10} \mathbf{m} \xrightarrow{\cdot 10} \text{dm} \xrightarrow{\cdot 10} \text{cm} \xrightarrow{\cdot 10} \text{mm}$$

$$\text{mam} \xleftarrow{:\,10} \text{km} \xleftarrow{:\,10} \text{hm} \xleftarrow{:\,10} \text{dam} \xleftarrow{:\,10} \mathbf{m} \xleftarrow{:\,10} \text{dm} \xleftarrow{:\,10} \text{cm} \xleftarrow{:\,10} \text{mm}$$

1 **Expresa cada longitud en la unidad indicada.**

a) 34 km = 34 · 1.000 = ... m

b) 348 m = ... = ... hm

c) 0,8 hm = ... = ... km

d) 7 cm = 7 : 10 = ... dm

e) 4,3 hm = ... = ... m

f) 7,5 dm = ... = ... cm

2 **Ordena, de mayor a menor (>), las siguientes medidas. Toma como referencia el metro y transforma todas las medidas en esa unidad.**

0,34 km – 45 dm – 5 m – 678 cm – 12 m – 0,25 km – 9,5 dam – 5.500 mm – 0,01 km – 2,83 dam

3 **Dibuja con tu regla cuatro segmentos de longitudes 5, 7, 12 y 14 cm, respectivamente. Nómbralos y completa la tabla adjunta.**

SEGMENTO	LONGITUD DEL SEGMENTO (cm)	EQUIVALENCIA (m)	EQUIVALENCIA (dm)

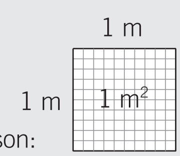
4 **Completa la siguiente tabla.**

	km	hm	m	dm	cm
5 m					
2,3 km					
153 dm					
6,5 hm					
2.000 cm					

5 **Completa la tabla.**

LONGITUD (km)	LONGITUD (hm)	LONGITUD (m)
		2.850.000
11.200		
	9.270	
913		
		743.000
680		
		535.000
	3.410	
336		

UNIDADES DE SUPERFICIE



- El **metro cuadrado** es la unidad principal de superficie. Se escribe **m^2**.
- Un metro cuadrado es la superficie de un cuadrado que tiene 1 metro de lado.
- Los **múltiplos** (unidades mayores) y **submúltiplos** (unidades menores) del metro cuadrado son:

MÚLTIPLOS DEL METRO CUADRADO			UNIDAD PRINCIPAL	SUBMÚLTIPLOS DEL METRO CUADRADO		
1.000.000 m^2 kilómetro cuadrado km^2	10.000 m^2 hectómetro cuadrado hm^2	100 m^2 decámetro cuadrado dam^2	**metro cuadrado m^2**	0,01 m^2 decímetro cuadrado dm^2	0,0001 m^2 centímetro cuadrado cm^2	0,000001 m^2 milímetro cuadrado mm^2

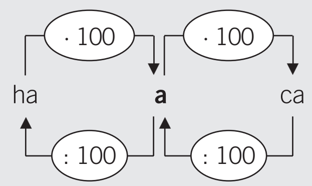
- Cada unidad es 100 veces mayor que la inmediata inferior y 100 veces menor que la inmediata superior.

$$km^2 \xrightarrow{\cdot 100} hm^2 \xrightarrow{\cdot 100} dam^2 \xrightarrow{\cdot 100} \mathbf{m^2} \xrightarrow{\cdot 100} dm^2 \xrightarrow{\cdot 100} cm^2 \xrightarrow{\cdot 100} mm^2$$

$$km^2 \xleftarrow{: 100} hm^2 \xleftarrow{: 100} dam^2 \xleftarrow{: 100} \mathbf{m^2} \xleftarrow{: 100} dm^2 \xleftarrow{: 100} cm^2 \xleftarrow{: 100} mm^2$$

Para medir extensiones de campo, fincas, bosques, etc., se utilizan otras unidades:

UNIDADES	SÍMBOLO	EQUIVALENCIA	EQUIVALENCIA EN m^2
Hectárea	ha	1 hm^2	10.000 m^2
Área	a	1 dam^2	100 m^2
Centiárea	ca	1 m^2	1 m^2



6 **Completa las siguientes igualdades.**

a) 90 m^2 = 950 · 100 = ... dm^2

b) 43,2 cm^2 = ... = ... dm^2

c) 0,67 m^2 = ... = ... cm^2

d) 54 dm^2 = 54 : 100 = ... m^2

e) 0,463 km^2 = ... = ... hm^2

f) 82 dam^2 = ... = ... m^2

7 **Si 1 m^2 es la superficie de un cuadrado de 1 m de lado, expresa lo que sería:**

a) 1 cm^2

b) 1 mm^2

c) 1 km^2

d) 1 dam^2

8 **Expresa las siguientes unidades de superficie en su correspondiente equivalencia.**

EXPRESIÓN (ha)	EQUIVALENCIA (a)	EQUIVALENCIA (m^2)
Un campo de girasoles de 3 hectáreas		
Un bosque de 250 hectáreas		
Una finca de 10 hectáreas		
Un terreno de cultivo de 2,4 hectáreas		

9 **Ordena, de menor a mayor (<), las siguientes medidas. Toma como referencia el metro cuadrado y transforma todas las medidas en esta unidad.**

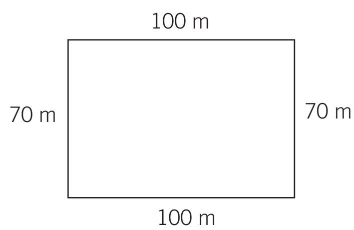
0,024 dm^2 – 32 m^2 – 8.400 dm^2 – 0,75 hm^2 – 0,0024 km^2 – 12 dam^2 – 865.271 mm^2 – 50 m^2

PERÍMETRO DE UN POLÍGONO

El perímetro de un polígono es la medida de su contorno. Para calcularlo **sumamos sus lados**.
Lo expresamos con la letra *P*.

EJEMPLO

Halla el perímetro de un campo de fútbol de lados 100 m y 70 m.



$P = 100 + 70 + 100 + 70 = 340$ m

El perímetro es una medida de longitud.

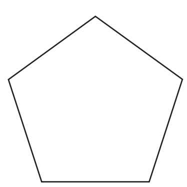
10 **Calcula el perímetro del tablero de tu pupitre y de una baldosa del suelo de tu aula. Realiza un dibujo significativo.**

Tablero del pupitre

Baldosa

11 **Halla el perímetro de los siguientes polígonos regulares. Realiza un dibujo a escala de cada figura.**

a) Pentágono, de 5 cm de lado.



c) Hexágono, de 7 cm de lado.

b) Triángulo equilátero, de 3 cm de lado.

d) Cuadrado, de 10 cm de lado.

10 OBJETIVO 3
CALCULAR EL ÁREA DE LOS PRINCIPALES POLÍGONOS

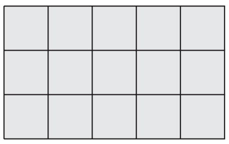
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ÁREA DE UNA FIGURA

- El área de una figura es la medida de su superficie, e indica el número de veces que contiene la unidad de superficie.
- El valor del área depende de la unidad de medida que tomemos.
- Lo expresamos con la letra *A*.

EJEMPLO

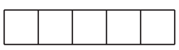
Tomando como unidad de superficie un cuadradito ☐, calcula el área de la siguiente figura.

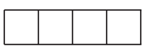


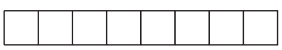
- La figura contiene 15 ☐.
- Su área es: $A = 15$ unidades de superficie.

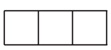
- Si cada cuadradito tuviera 1 cm de lado, su área sería 1 cm^2. ☐ 1 cm
- Y el área de la figura sería 15 cm^2.

1 **Tomando como unidad de medida un cuadrado, expresa el área de cada figura.**

a) 

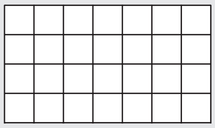
c) 

b) 

d) 

ÁREA DEL RECTÁNGULO

- El rectángulo de la figura realizada a escala tiene 28 cuadrados de 1 cm^2 cada uno.
- Son 7 columnas y 4 filas.
- Para hallar el área del rectángulo se multiplica la longitud de la base por la longitud de la altura.



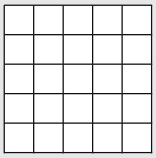
Altura = 4 cm

Base = 7 cm

Área rectángulo = base · altura → $A = b \cdot h = 7 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 28 \text{ cm}^2$

ÁREA DEL CUADRADO

- El cuadrado de la figura realizada a escala tiene 25 cuadrados de 1 cm^2.
- Son 5 columnas y 5 filas.
- Para hallar el área del cuadrado se multiplica la longitud de un lado por la longitud del otro lado.



Lado = 5 cm

Lado = 5 cm

Área cuadrado = lado · lado → $A = l \cdot l = 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 25 \text{ cm}^2$

2 **Obtén el área de estos rectángulos y realiza un dibujo representativo.**

a) Base = 10 cm Altura = 4 cm

b) Base = 12 cm Altura = 6 cm

3 **Determina el área de los cuadrados y realiza un dibujo representativo.**

a) Lado = 4 cm

b) Lado = 8 cm

4 **Un rectángulo tiene 36 cm^2 de área y 12 cm de base. Calcula.**

a) La altura del rectángulo.

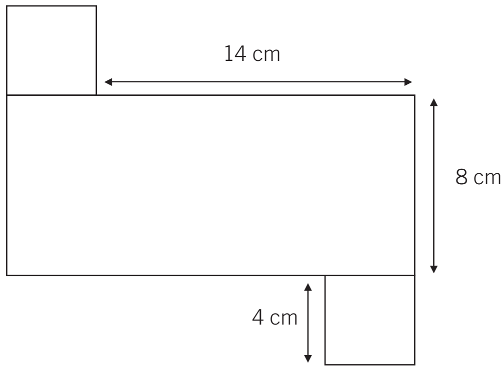
b) El perímetro del rectángulo.

5 **Si un cuadrado tiene 64 cm^2 de área, halla.**

a) El lado del cuadrado.

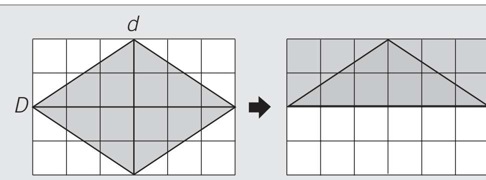
b) El perímetro del cuadrado.

6 **Halla el área de esta figura, compuesta por dos cuadrados iguales y un rectángulo.**



ÁREA DEL ROMBO

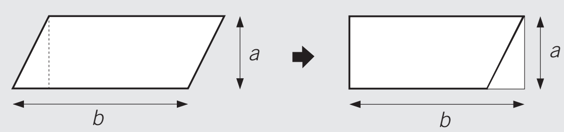
El área del rectángulo es el producto de la base por la altura.
El rombo ocupa la mitad de la superficie del rectángulo.



$$\text{Área rombo} = \frac{\text{diagonal mayor} \cdot \text{diagonal menor}}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

ÁREA DEL ROMBOIDE

El romboide lo podemos transformar en rectángulo.
El área de un romboide es el área de un rectángulo de igual base y altura.



$$\text{Área romboide} = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$

7 **Obtén el área de los siguientes rombos y realiza un dibujo representativo a escala.**

a) Diagonal mayor = 7 cm
Diagonal menor = 3 cm

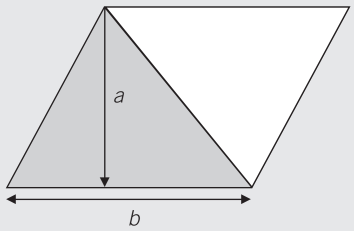
b) Diagonal mayor = 10 cm
Diagonal menor = 5 cm

8 **Calcula el área de estos romboides y haz un dibujo representativo a escala.**

a) Base = 8 cm
Altura = 2 cm

b) Base = 12 cm
Altura = 5 cm

ÁREA DEL TRIÁNGULO

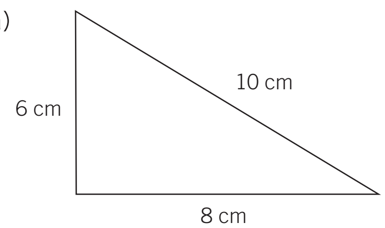


- Al trazar la diagonal del romboide, este queda dividido en dos triángulos.
- El triángulo gris y el triángulo blanco ocupan la misma superficie.
- Área triángulo $= \dfrac{\text{área de romboide}}{2} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$$\textbf{Área triángulo} = \frac{\boldsymbol{b \cdot h}}{\mathbf{2}}$$

9 **Calcula el área y el perímetro de los triángulos.**

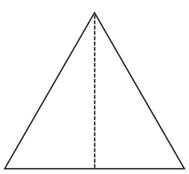
a)



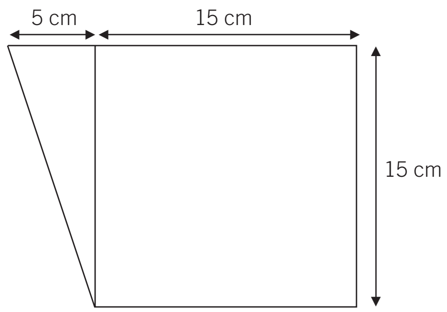
b) Triángulo equilátero

Lado = 6 cm

Altura = 5,2 cm

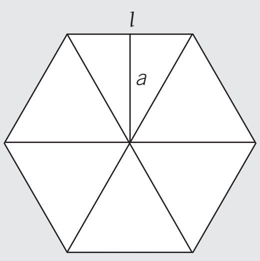


10 **Obtén el área de la siguiente figura.**

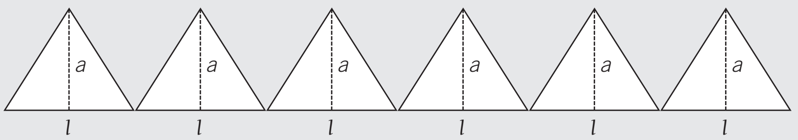


ÁREA DEL POLÍGONO REGULAR

El siguiente hexágono regular se descompone en 6 triángulos iguales cuya altura es la apotema, *a*.



- Área de cada triángulo $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{\text{lado} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{l \cdot a}{2}$



- Área de los 6 triángulos $= 6 \cdot \dfrac{l \cdot a}{2} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{P \cdot a}{2}$

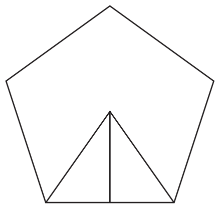
Perímetro del hexágono $= 6 \cdot l$

$$\textbf{Área polígono regular} = \frac{\textbf{perímetro} \cdot \textbf{apotema}}{\mathbf{2}}$$

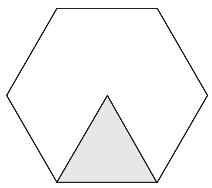
ADAPTACIÓN CURRICULAR

11 **Calcula el perímetro y el área de los siguientes polígonos.**

a) Pentágono regular — Lado = 5 cm; Apotema = 3,44 cm

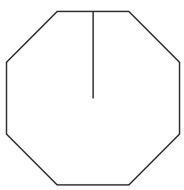


b) Hexágono regular — Área del triángulo = 15,6 cm^2; Lado = 6 cm

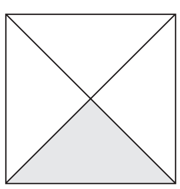


12 **Determina el perímetro y el área de las figuras.**

a) Octógono regular — Apotema = 2,41 cm; Lado = 2 cm

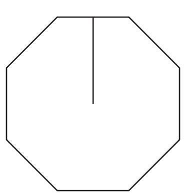


b) Cuadrado — Lado = 10 cm; Área del triángulo = 25 cm^2

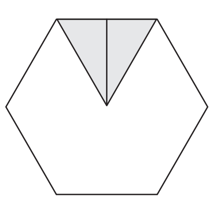


13 **Halla lo que mide el lado de estos polígonos.**

a) Octógono regular — Área del octógono = 1.920 cm^2; Apotema = 24 cm



b) Hexágono regular — Área del hexágono = 345 cm^2; Apotema = 10 cm



CALCULAR EL ÁREA Y EL PERÍMETRO DE FIGURAS CIRCULARES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

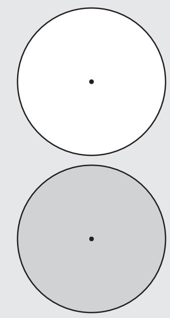
CONCEPTOS DE CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Circunferencia

La circunferencia es una línea curva cerrada y plana cuyos puntos están situados a la misma distancia del centro.

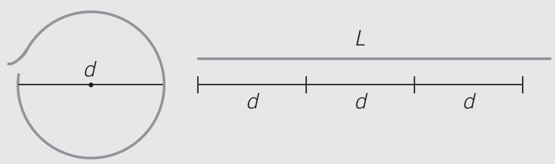
Círculo

El círculo es la figura plana formada por la circunferencia y su interior.



RELACIÓN ENTRE LA CIRCUNFERENCIA Y SU DIÁMETRO

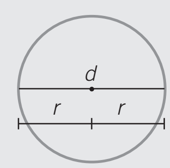
- Imagina que extendemos el contorno completo de la circunferencia y lo comparamos con el diámetro.



La longitud de la circunferencia es un poco mayor que el triple de la longitud de su diámetro.

- Al dividir la longitud de la circunferencia entre el diámetro se obtiene siempre el mismo número, que se representa por la letra griega π, y se lee *pi*.
- El número siempre es el mismo valor: $\pi = \dfrac{\text{Longitud circunferencia}}{\text{Diámetro}} \approx 3{,}14$

$\dfrac{L}{d} = \pi$, de donde se obtiene la expresión de la **longitud de una circunferencia** $L = d \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot r$



1 **Comprueba la obtención de π con los siguientes ejemplos.**

	LONGITUD CIRCUNFERENCIA	DIÁMETRO	LONGITUD DIVIDIDA ENTRE DIÁMETRO
RELOJ	78,5 cm	25 cm	
ARO DE GIMNASIA	226,1 cm	72 cm	
RUEDA COCHE	168 cm	53,5 cm	
PAPELERA	157 cm	50 cm	

2 **Dibuja una circunferencia de diámetro 4 cm y calcula su longitud.**
(Utiliza el compás con un radio de 2 cm.)

3 **La rueda de una bicicleta tiene un radio de 29 cm.**

a) ¿Qué distancia recorre la bicicleta cada vez que la rueda da una vuelta?

b) ¿Y si da tres vueltas?

ÁREA Y PERÍMETRO DEL CÍRCULO

- El círculo es un polígono regular con muchos lados.

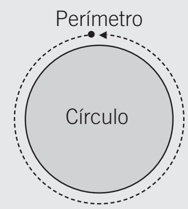
$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{El perímetro es } 2\pi r \\ \text{La apotema es el radio } r\end{array}\right\}$$

$$\textbf{Área círculo} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{\cancel{2}\pi \cdot r \cdot r}{\cancel{2}} = \pi r^2$$

El **perímetro** del círculo es igual a la longitud de la circunferencia.

$$P = 2\pi r$$



4 **Realiza un dibujo a escala y calcula el área de estos círculos.**

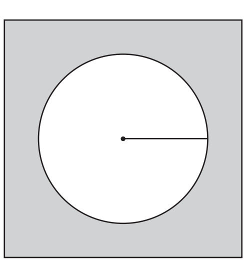
a) Radio = 3 cm

b) Radio = 5 cm

5 **Quiero sembrar un terreno circular que tiene un diámetro de 140 dm. ¿Cuántos metros cuadrados son?**

6 **Halla la superficie de las zonas sombreadas.**

a) Lado del cuadrado: 4 cm
Radio del círculo: 1,3 cm



b) Radio del círculo mayor: 5 cm
Radio del círculo menor: 3 cm